

复分析

Fir1247

2023 年 03 月-2023 年 07 月

前言

为避免歧义，本文档中的 $\subset$ ，相当于 $\subseteq, \subseteqq$ ，均表示“包含于”的意思，且只使用第一种形式；本文档中的 $\subsetneq$ ，相当于 $\subsetneqq$ ，均表示“真包含于”的意思，且只使用第一种形式。

Fir1247

目录

第一章	复数与复变函数	1
1.1	复数的定义与运算	1
1.2	复数的几何表示	1
1.3	复平面的扩充	2
1.4	复平面上的拓扑	2
1.5	复变函数的极限与连续性	3
第二章	全纯函数	5
2.1	复变函数的导数	5
2.2	Cauchy-Riemann 方程	5
2.3	导数的几何意义	6
2.4	初等函数	6
2.4.1	指数函数	7
2.4.2	对数函数	7
2.4.3	幂函数	7
2.4.4	三角函数	9
2.5	分式线性变换	9
2.5.1	分式线性变换把圆周变为圆周	9
2.5.2	分式线性变换保交比	9
2.5.3	分式线性变换把对称点映为对称点	9
2.6	外微分算子	10
第三章	柯西积分理论	12
3.1	复变函数的积分	12
3.2	柯西积分定理	13
3.3	复变函数的原函数	13
3.4	柯西积分公式	13
3.5	柯西积分公式的应用	13
第四章	全纯函数的 Taylor 展开及其应用	15
4.1	函数列与函数项级数	15
4.2	幂级数	16
4.3	全纯函数的 Taylor 展开	18
4.4	辐角原理与鲁歇定理	19
4.5	最大模原理和 Schwarz 引理	20

第五章	全纯函数的 Laurent 展开及其应用	22
5.1	Laurent 展开	22
5.2	孤立奇点	22
5.2.1	孤立奇点为有限点	22
5.2.2	孤立奇点为无穷远点	23
5.3	整函数与亚纯函数	23
5.4	残数定理	24
5.5	利用残数定理计算定积分	25
5.5.1	无穷型积分	25
5.5.2	半无穷型积分	26
5.5.3	有限积分	29
5.5.4	两个特殊的积分	30
5.6	插值定理与因子分解定理	31
第六章	全纯开拓	33
6.1	Schwarz 对称原理	33
6.2	幂级数的全纯开拓	34
6.3	完全解析函数与单值性定理	35
第七章	共形映射	36
7.1	正规族	36
7.2	Riemann 映射定理	36
7.3	边界对应原理	36
7.4	Schwarz-Christoffel 公式	36
7.5	复习课：一些重要的共形映射	37

第一章 复数与复变函数

1.1 复数的定义与运算

我们把复数定义为一对有序的实数：

$$\mathbb{C} = \{(a, b) | a, b \in \mathbb{R}\}$$

在这个集合中定义加法和乘法两种运算：

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

容易验证 $\mathbb{C}$ 在上述加法和乘法运算下构成一个域，称之为复数域。

注 $\tilde{\mathbb{R}} = \{(a, 0) | a \in \mathbb{R}\}$ 是复数域的一个子域，显然它又和实数域同构，所以可以认为实数域是复数域的一个子域。

定义 1.1.1 $\mathbb{C}$ 中的元素 $(0, 1)$ 记作 i ，称为虚数单位，并把元素 $z = (a, b)$ 简记为 $a + ib$ 。

(1). a 称为实部，记作 $Re\ z$ ， b 称为虚部，记作 $Im\ z$ 。

(2). $\bar{z} = a - bi$ 称为 z 的共轭；

(3). z 的模长 $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}}$ 。

定理 1.1.1 一些性质：

(1). $Re\ z = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$, $Im\ z = \frac{1}{2mi}(z - \bar{z})$;

(2). $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$, $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$;

(3). $|zw| = |z||w|$, $|\bar{z}| = |z|$;

(4). $|z + w| \leq |z| + |w|$ ，等号成立当且仅当存在 $t \in \mathbb{R}$ s.t. $z = tw$ 或 $w = tz$ 。

1.2 复数的几何表示

复数的定义来自于有序实数对，相当于平面上的向量。这个平面我们称之为复平面。

定义 1.2.1 设 $z = a + rmi$, $r = |z|$ ，则 $z = r(\frac{a}{r} + rmi\frac{b}{r}) = r \cos \theta + ir \sin \theta$ ， θ 称为 z 的一个辐角。记 $Arg\ z = \{\theta + 2k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$ 为 z 的所有辐角， $arg\ z$ 是 $(-\pi, \pi]$ 范围里的辐角。¹

定理 1.2.1 由欧拉公式 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ ， $z = a + bi = re^{i\theta}$ ，由此引出一些性质：

(1). $z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$;

(2). 复数 z_1, z_2 夹角为 $arg\ \frac{z_1}{z_2}$ 。

证明 (2). $arg\ \frac{z_1}{z_2} = arg\ \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)} = \theta_1 - \theta_2$ ，即为夹角。

¹也可以定义为 $[0, 2\pi)$ 范围内的，使用时注明即可。

1.3 复平面的扩充

定义 1.3.1 在 $\mathbb{C}$ 上引入无穷远点 ∞ , 定义 ∞ 相关运算为:

$$\begin{aligned} z + \infty = \infty, z - \infty = \infty, z \cdot \infty = \infty (z \neq 0) \\ \frac{z}{\infty} = 0, \frac{z}{0} = \infty (z \neq 0) \end{aligned}$$

引入了无穷远点 ∞ 的复平面, 即 $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, 称为扩充平面或闭平面。

$\mathbb{C}_\infty$ 可以和单位球面 S_2 一一对应,

$$\begin{aligned} z = x + iy &\leftrightarrow (x_1, x_2, x_3) \in S_2 \\ x_1 &= \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, x_2 = \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, x_3 = \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1} \\ z &= \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3} \end{aligned}$$

1.4 复平面上的拓扑

在 $\mathbb{C}$ 上定义: $d(z, w) = |z - w|$. 容易验证 d 是一个度量, 由此度量诱导的拓扑即为复平面 (或者复数域) 上的拓扑。

定义 1.4.1 我们回顾一下点集拓扑的一些基础概念: $E \subset \mathbb{C}$, $x \in \mathbb{C}$,

1. 如果存在某个 x 的邻域是 E 的子集, 则称 x 为 E 的内点, E 的全体内点称为 E 的内部, 记作 E° .
2. 如果存在某个 x 的邻域是 E^c 的子集, 则称 x 为 E 的外点, E 的全体外点称为 E 的外部, 也就是 E^c 的内部, 为 $(E^c)^\circ$.
3. 如果 x 的任意邻域都分别和 E 、 E^c 相交, 称 x 为 E 的边界点, 记作 ∂E .
4. 如果 E 只包含内点, 则称 E 是开集; 如果 E^c 是开集, 则称 E 是闭集。
5. 如果 x 的任意去心邻域总与 E 相交, 称 x 为 E 的聚点或极限点, E 的全体极限点称为 E 的导集, 记作 E' .
6. E 中不是极限点的点称为孤立点, E 与其导集的并称为 E 的闭包, 记作 $\overline{E}$.
7. 如果 E 的任意开覆盖必有有限子覆盖, 称 E 为紧集。
8. 集合 E 的直径定义为

$$\text{diam } E = \sup\{|x - y| | x, y \in E\}$$

推论 1.4.1 (1). $a \in \overline{E} \Leftrightarrow$ 任意 $\varepsilon > 0$, 存在 r 使得 $B(a, r) \cap E \neq \emptyset$.

(2). $(\overline{E})^c = (E^c)^\circ$.

(3). E° 是开集, ∂E 和 $\overline{E}$ 是闭集。

(4). E 是闭集 $\Leftrightarrow E = \overline{E} \Leftrightarrow E' \subset E$.

注 由 d 定义邻域

$$B(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} | |z - z_0| < r\}$$

也可以定义无穷远点的邻域

$$B(\infty, r) = \{z \in \mathbb{C} | |z| > r\}$$

复数 $z = x + iy$ 相当于平面上的向量 (x, y) , $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$ 的充要条件是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0$$

类似地, 复数域上的点列 $\{z_n\}$ 是 *Cauchy* 列的充要条件是 $\{x_n\}$ 、 $\{y_n\}$ 都是实数域上的柯西列。

定理 1.4.1 $(\mathbb{C}, d)$ 的完备性:

- (1). 任何 *Cauchy* 列都收敛。
- (2). 有界点列必有收敛子列。
- (3). (*Bolzano – Weierstrass*) 有界无穷点集必有聚点。²
- (4). (*Cantor*) 闭集套定理在复数域上的推广: 若非空闭集序列 $\{F_n\}$ 满足

$$F_1 \supset F_2 \supset \cdots \supset F_n \supset \cdots$$

和

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam } F_n = 0$$

则 $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ 必为独点集。

- (5). (*Heine – Borel*) 扩充平面上, E 是紧集当且仅当 E 是闭集。复平面上, E 是紧集当且仅当 E 是有界闭集。

定理 1.4.2 $E \subset \mathbb{C}$ 是紧集, $F \subset \mathbb{C}$ 是闭集, 如果二者不相交, 则有

$$d(E, F) = \inf\{d(z, w) | z \in E, w \in F\} > 0.$$

定义 1.4.2 $E \subset C$ 称为连通的, 如果存在非空集合 E_1, E_2 , 使得 $E = E_1 \sqcup E_2$, 并满足 $\overline{E_1} \cap E_2 \neq \emptyset$ 或 $E_1 \cap \overline{E_2} \neq \emptyset$ 。

定理 1.4.3 连通的等价定义: $E \subset C$ 连通 $\Leftrightarrow$ 存在非空开集 E_1, E_2 , 使得 $E = E_1 \sqcup E_2$ 。

定义 1.4.3 $E \subset C$ 称为道路连通的, 如果 $\forall x, y \in E$, 存在连续映射 $\gamma: [0, 1] \rightarrow E, \gamma(0) = x, \gamma(1) = y$ 。

定理 1.4.4 $E \subset C$ 是开集, 则 E 是道路连通的 $\Leftrightarrow E$ 是连通的。

定义 1.4.4 非空连通开集称为区域。区域 D 被称为是单连通的, 如果 D 内任意简单闭曲线的内部³仍是 D 的子集。

1.5 复变函数的极限与连续性

定义 1.5.1 设 E 是复平面上一点集, 如果对每一个 $z \in E$, 按照某一规则有一确定的复数 w 与之对应, 我们就说在 E 上确定了一个单值 (复变) 函数, 记作

$$f: E \rightarrow \mathbb{C}, f(z) = w$$

²扩充平面上, 无穷远点就是无界无穷点集的聚点。

³简单闭曲线的内部定义来自 Jordan 分割定理。

E 称为 f 的定义域, 点集 $f(E) = \{f(z) | z \in E\}$ 称为 f 的值域。

如果对于 $z \in E$, 与之对应的复数 w 有不只一个, 则称在 E 上确定了一个多值函数。若无特殊说明, 我们提到函数时都是指单值函数。

函数 $f(z)$ 常常也写成如下形式:

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

这就是说, 一个复变函数等价于两个实变函数。

定义 1.5.2 设 E 是复平面上一点集, f 是 E 上的函数, z_0 是 E 的一个极限点。如果对于任意的 $\varepsilon > 0, \exists \delta > 0, z \in E, |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - w| < \varepsilon$, 称 f 在 z_0 处有极限 w , 记作

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w$$

如果 $w = f(z_0)$, 称 f 在 z_0 处连续。如果 f 在 E 上的每一点都连续, 称 f 在 E 上连续。⁴

定理 1.5.1 紧集 E 上的连续函数 f 有很多重要的性质:

- (1). f 在 E 上有界。
- (2). $|f|$ 能在 E 上取到最大值和最小值。
- (3). f 在 E 上一致连续。⁵

⁴这就要求 E 上的每一点都是 E 的极限点。

⁵一致连续的定义和实变函数类似。

第二章 全纯函数

2.1 复变函数的导数

定义 2.1.1 设 $f: D \rightarrow \mathbb{C}$, 如果

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

存在, 称 f 在 z_0 处可导。

如果 $\exists A \in \mathbb{C}, f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = A\Delta z + o(|\Delta z|), |\Delta z| \rightarrow 0$, 称 f 在 z_0 处可微。

如果 f 在区域 D 上每一点处都可导, 称 f 在 D 上是全纯函数。

定理 2.1.1 f 在 z_0 处可导 $\Leftrightarrow f$ 在 z_0 处可微, 且 $A = f'(z_0)$ 。

注 f 在 z_0 处可导、可微或全纯是等价的, 此时 f 在 z_0 的某个邻域上全纯。

2.2 Cauchy-Riemann 方程

定义 2.2.1 实可微的定义: $f = u + iv, u, v$ 都可微。

定理 2.2.1 f 在 z_0 处可微 $\Leftrightarrow f$ 在 z_0 处实可微且 $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0$ 。

证明

$$\begin{aligned} f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) &= u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0) + i(v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)) \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) \Delta x + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} \right) \Delta y + o(|\Delta z|) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + o(|\Delta z|) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x} (\Delta z + \overline{\Delta z}) + \frac{1}{2i} \frac{\partial f}{\partial y} (\Delta z - \overline{\Delta z}) + o(|\Delta z|) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) f \cdot \Delta z + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) f \cdot \overline{\Delta z} + o(|\Delta z|) \\ &= \frac{\partial f}{\partial z} \Delta z + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \overline{\Delta z} + o(|\Delta z|) \end{aligned}$$

所以 f 在 z_0 处可微 $\Leftrightarrow f$ 在 z_0 处实可微且 $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0$ 。

注 $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0$ 等价于

$$u_x = v_y, u_y = -v_x$$

这被称为称 Cauchy-Riemann 方程, 简称 C-R 方程。满足此条件时有:

$$f'(z_0) = \frac{1}{2}(u_x + iv_x - iu_y + v_y) = u_x + iv_x.$$

定理 2.2.2 如果 $f = u + iv \in H(D)$, 则 u, v 都是 D 上的调和函数。

定义 2.2.2 如果调和函数 u, v 满足 C-R 方程, 则称 u, v 是共轭调和函数。

定理 2.2.3 设 u 为单连通区域 D 上的调和函数, 则 u 一定存在共轭调和函数。

证明 令

$$P = -\frac{\partial u}{\partial y}, Q = \frac{\partial u}{\partial x}$$

于是 $Pdx + Qdy$ 是闭形式, 因此积分

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} Pdx + Qdy$$

与路径无关, 上式就是 u 的共轭调和函数。

例 2.2.1 $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $u(z) = \ln|z|$, 则 u 在 D 上调和但是没有共轭调和函数。

假设存在 v 使得 $f = u + iv$ 全纯, 令 $g(z) = \ln|z| + i \cdot \arg z, z \in D' = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \subset D$, 则 $g(z)$ 在 D' 中全纯。

于是 $f(z) - g(z)$ 在 D' 上全纯。

定理 2.2.4 设 $f = f(x, y) \in C^2(D)$, 则 $\Delta f = 4 \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}}$ 。

证明 将右式展开计算即可。

例 2.2.2 D 为区域, $f: D \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ 全纯, 求证 $\ln|f(z)|$ 在 D 上调和。

证明 $g = \ln|f(z)| = \frac{1}{2} \ln(f \cdot \bar{f})$, 再计算证明 $\frac{\partial^2 g}{\partial z \partial \bar{z}} = 0$ 即可。

2.3 导数的几何意义

如果 $f'(z_0) \neq 0$, 则在 z_0 的邻域中, 做一个以 z_0 为顶点的小三角形, 被 f 映为曲边三角形, 且三个角与原三角形相等, 这被称为保角性。

导数不为 0 的映射称为共形映射。

2.4 初等函数

本节默认表述: $z = x + iy = r \cdot e^{i\theta}$, $\theta = \arg z \in (-\pi, \pi]$ 。

定义 2.4.1 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ 全纯, 如果 $D \subset \Omega$ 且 $f|_D$ 是单射, 则称 $f|_D$ 是单叶全纯的, D 称为 f 的一个单叶性域。

2.4.1 指数函数

$f(z) = e^z = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$, 因此

$$u(x, y) = e^x \cos y, v(x, y) = e^x \sin y$$

不难验证 f 满足 C-R 方程。

注意到

$$e^{z_1} = e^{z_2} \Leftrightarrow z_1 - z_2 = 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}$$

这就是说, 条状带区域

$$D = \{z | x \in R, y \in [\alpha, \beta]\}, \forall \beta - \alpha < 2\pi$$

都是 f 的一个单叶性域, 而且将 D 映射到扇形区域

$$f(D) = \{z | r > 0, \theta \in [\alpha, \beta]\}$$

2.4.2 对数函数

$z \neq 0$, 若 $e^f = z$, 则记作 $f = \text{Ln}z$.¹

注意, 满足 $e^f = z$ 的复数 f 很可能不止一个, 因此对数函数 $f(z) = \text{Ln}z$ 是一个多值函数。

$$\text{Ln}z = \ln r + i\theta + 2k\pi i, z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

实际上 $i\theta + 2k\pi i$ 就是辐角 $\text{Arg}z$, 对数函数的多值性就是因为辐角的多值性。对于多值函数来说, 一个重要的问题是: 在什么样的区域中, 从这个多值函数能够取出单值分支?

例如固定 $k = 0$, 定义单值函数 $f_0(z) = \ln r + i\theta, z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, 它在 $(-\infty, 0)$ 上不连续, 然而它在 $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ 上是全纯的。

对于对数函数来说, 如果 D 是不包含原点和无穷远点的单连通域, 则必在 D 上存在无穷多个单值函数。

定义 2.4.2 当 z 绕某点一周时, 为了保持连续性, 多值函数回不到初始值, 则该点称为多值函数的支点。

为了避免这种“绕支点一周”的路径发生, 我们可以找一条线将支点连接, 在定义域中去除这条线。这条线就称为割线。例如 0 和无穷远点就是对数函数的支点, $(-\infty, 0]$ 就是一条割线。考虑 $\text{Ln}z$ 的单值分支时, 我们就将其记作 $\ln z$ 。

例 2.4.1 考虑函数 $f(z) = \ln(z-a) + \ln(z-b) = \ln|z-a| + i\theta_a$

2.4.3 幂函数

考虑 $f(z) = z^\mu, \mu = a + ib \in \mathbb{C}$, 这里定义:

$$z^\mu = e^{\mu \text{Ln}z} = e^{\mu \ln|z|} \cdot e^{i\mu\theta} \cdot e^{i\mu \cdot 2k\pi}$$

(1). 若 $\mu = n \in \mathbb{Z}_+$, $e^{i\mu \cdot 2k\pi} = 1$, 此时函数是单值的。

¹为了和实变函数中的自然对数 $\ln$ 区分, 复变函数中的对数一般首字母大写, 写作 Ln . 不加底数的 $\log$ 代表 $\ln$, 所以 Ln 也可以写成 Log . 具体使用时表述清楚即可。

(2). 若 $\mu = n^{-1}, n \in \mathbb{Z}_+$, 此时函数是 n 值的:

$$z^{\frac{1}{n}} = |z|^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}} \quad (k = 0, 1, \dots, n-1)$$

$k = 0$ 时的单值分支称为主支, 记 $f(z) = \sqrt[n]{z}$.

(3). 一般情况下, $\mu = a + ib$, 则

$$z^\mu = e^{a \ln |z| - b(\theta + 2k\pi)} \cdot e^{i(b \ln |z| + a\theta + 2k\pi a)}$$

1° $b = 0, a = n \in \mathbb{Z}$, 单值。

2° $b = 0, a = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, q 值。

3° $b = 0, a \notin \mathbb{Q}$, 无穷多值。

4° $b \neq 0$, 无穷多值。

例 2.4.2

$$i = e^{i \ln i} = e^{i(\ln |i| + i(2k\pi + \frac{\pi}{2}))} = e^{-(2k\pi + \frac{\pi}{2})} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

例 2.4.3 设

$$f(z) = \sqrt{\frac{(1-z)^3}{z}} \cdot (z+1)^{-1}$$

f_0 是 f 在 $[0, 1]$ 的上岸取正值² 的单值全纯分支, 计算 $f_0(-i)$.

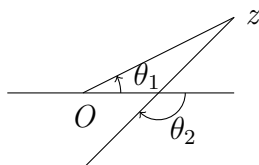
解 分析题目: 多值性时因为根号产生的, 所以我们考虑 $g(z) = \sqrt{\frac{(1-z)^3}{z}}$ 的多值性就可以了。设 $z = r_1 e^{i\theta_1}$, $1-z = r_2 e^{i\theta_2}$, 这里的 θ 都是辐角主值。于是

$$g(z) = \sqrt{r_1^{-1} r_2^3} \cdot e^{i(\frac{3\theta_2 - \theta_1}{2} + k\pi)}$$

这是一个 2 值函数, 取值可能性有 $k = 0, 1$. 在 $[0, 1]$ 的上岸, 有 $\theta_1 = \theta_2 = 0$, $\frac{1}{z+1} > 0$, 可见 $k = 0$ 的分支上 f 才是正的, 因此

$$f(z) = \frac{1}{z+1} \cdot \sqrt{r_1^{-1} r_2^3} \cdot e^{i(\frac{3\theta_2 - \theta_1}{2})}$$

$z = -i$ 时, 我们来看 θ_1, θ_2 的值是怎样来取的: 如果从 $z = 1$ 的右侧连续转移到 $z = -i$, 此时 $\theta_1 = -\frac{\pi}{2}, \theta_2 = -\frac{7}{4}\pi$; 如果从 $z = 0$ 的左侧连续转移到 $z = -i$, 此时 $\theta_1 = \frac{3\pi}{2}, \theta_2 = \frac{1}{4}\pi$. 经计算可以发现, 两种途径得到的结果是一样的, 这也是合理的。



²什么是“割线上岸的取值”? 我们知道, 全纯函数的定义域一般是要剔除割线的, 而且往往在割线两侧不连续。因此在割线上的取值就是指 z 趋近于割线时的极限, 这里的“ $[0, 1]$ 上岸”就是从 $\text{Im} z > 0$ 部分趋于这条割线的极限。

2.4.4 三角函数

定义:

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}), \sin z = \frac{1}{2}(e^{iz} - e^{-iz})$$

性质如下:

1. $\sin z, \cos z$ 是整函数。
2. $\sin z, \cos z$ 有与实值函数类似的结论。
3. $\sin z, \cos z$ 是无界函数。

例 2.4.4 求一保角变换 (全纯映射的复合), 将除去线段 $\{z = a + iy | 0 < y < h\}$ 的上半平面变为上半平面。

解 依次施加 $z - a, z^2, z + h^2, \sqrt{z}$ 的操作。空线段先被向左平移到虚轴, 再被宣传到负实轴, 再被右平移到正实轴, 最后左右张开。

2.5 分式线性变换

这一节是老师讲完第四章之后才讲的。

定义 2.5.1 形如

$$L(z) = \frac{az + b}{cz + d}, c \neq 0$$

的就是分式线性变换。可以分解成

$$L(z) = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c^2} \frac{1}{z + \frac{d}{c}}$$

这里的反演 $\frac{1}{z}$ 又可以分解成 $z \mapsto 1/\bar{z}$ 和 $z \mapsto \bar{z}$, 分别是关于圆周和实轴的对称。

2.5.1 分式线性变换把圆周变为圆周

只需说明 $w = z^{-1}$ 即可。

2.5.2 分式线性变换保交比

定理 2.5.1 如果分式线性变换 $L(z)$ 把圆周 γ_1 映为 γ_2 , z_1, z_2, z_3 是 γ_1 上不同的有序的三点, 则 $L(z)$ 把 z_1, z_2, z_3 的左边 (右边) 映为 $L(z_1), L(z_2), L(z_3)$ 的左边 (右边)。

2.5.3 分式线性变换把对称点映为对称点

定义 2.5.2 对于圆 $\gamma: \{|z - a| = r\}$, 关于 γ 的对称点 z, z^* 满足

$$|z - a||z^* - a| = r^2$$

特别地, 规定 a 和 ∞ 是一对对称点。

定理 2.5.2 如果 z, z^* 是 γ 的对称点, 则 $L(z), L(z^*)$ 是 $L(\gamma)$ 的对称点。

2.6 外微分算子

简要介绍 $\mathbb{C}$ 上的外微分算子 d .

$$dz = dx + i dy, d\bar{z} = dx - i dy$$

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right) \frac{dz + d\bar{z}}{2} + i \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right) \frac{dz - d\bar{z}}{2i} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \end{aligned}$$

引入 1-形式值算子

$$\partial = \frac{\partial}{\partial z} dz, \bar{\partial} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} d\bar{z}$$

所以 $d = \partial + \bar{\partial}$.

例 2.6.1 设 U, V 是复平面上的有交开集, 证明复变函数的链式法则:

$$f : U \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto f(z, \bar{z})$$

$$g : V \rightarrow \mathbb{C}, w \mapsto g(w, \bar{w})$$

$$h = g \circ f : U \cap V \rightarrow \mathbb{C}$$

则

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial z} &= \left(\frac{\partial g}{\partial w} \circ f \right) \frac{\partial f}{\partial z} + \left(\frac{\partial g}{\partial \bar{w}} \circ f \right) \frac{\partial \bar{f}}{\partial z} \\ \frac{\partial h}{\partial \bar{z}} &= \left(\frac{\partial g}{\partial w} \circ f \right) \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} + \left(\frac{\partial g}{\partial \bar{w}} \circ f \right) \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} \end{aligned}$$

证明 设 $w = f(z)$, 则

$$dw = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}$$

$$d\bar{w} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial z} dz + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} d\bar{z}$$

从而

$$\begin{aligned} dh &= \frac{\partial g}{\partial w}(w, \bar{w}) dw + \frac{\partial g}{\partial \bar{w}}(w, \bar{w}) d\bar{w} \\ &= \left(\frac{\partial g}{\partial w} \circ f \right) \left(\frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \right) + \left(\frac{\partial g}{\partial \bar{w}} \circ f \right) \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial z} dz + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \right) \\ &= \left[\left(\frac{\partial g}{\partial w} \circ f \right) \frac{\partial f}{\partial z} + \left(\frac{\partial g}{\partial \bar{w}} \circ f \right) \frac{\partial \bar{f}}{\partial z} \right] dz + \left[\left(\frac{\partial g}{\partial w} \circ f \right) \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} + \left(\frac{\partial g}{\partial \bar{w}} \circ f \right) \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} \right] d\bar{z} \end{aligned}$$

结合 $dh = \frac{\partial h}{\partial z} dz + \frac{\partial h}{\partial \bar{z}} d\bar{z}$, 比较系数得证。

例 2.6.2 D, Ω 均是 $\mathbb{C}$ 中的区域。

(1). $f \in H(D)$, 证明: 对于任意 $p \geq 2$, 都有

$$\Delta(|f(z)|^p) = p^2 |f(z)|^{p-2} |f'(z)|^2$$

(2). $u \in C^2(\Omega)$, $f \in H(D)$, 且 $f(D) \subset \Omega$, 则 $\Delta(u \circ f) = (\Delta u \circ f) |f'|^2$.

证明

$$\begin{aligned} \Delta(|f(z)|^p) &= 4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} (f(z) \overline{f(z)})^{\frac{p}{2}} \\ &= 2p \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \bar{f} + f \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} \right) (f \bar{f})^{\frac{p}{2}-1} \\ &= 2p \frac{\partial}{\partial z} (f \bar{f}') (f \bar{f})^{\frac{p}{2}-1} \\ &= 2p |f'|^2 |f|^{p-2} + 2p \left(\frac{p}{2} - 1 \right) (f \bar{f}') f' \bar{f} |f|^{p-4} \\ &= p^2 |f|^{p-2} |f'|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta(u \circ f) &= 4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} (u \circ f) = 4 \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \circ f \right) \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} + \left(\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} \circ f \right) \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right] \\ &= 4 \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} \circ f \right) \frac{\partial f}{\partial z} \right] = 4 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} \circ f \right) \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \\ &= 4 \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}} \circ f \right) \frac{\partial f}{\partial z} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \bar{z}^2} \circ f \right) \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right] \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \\ &= (\Delta u \circ f) |f'|^2 \end{aligned}$$

例 2.6.3 若 $u(x, y)$ 是实调和多项式, 则

$$f(z) = 2u\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\right) - u(0, 0)$$

是整函数, 并且 $\operatorname{Re} f(z) = u(x, y)$.

例 2.6.4 f 在 $D \cup \{1\}$ 上全纯, D 是开圆盘 $B(0, 1)$ 。 $f(D) \subset D$, $f(1) = 1$, 证明 $f'(1) \geq 0$.

第三章 柯西积分理论

3.1 复变函数的积分

定义 3.1.1 $\gamma: z = z(t), a \leq t \leq b$ 为一条可求长曲线, f 定义在 γ 上, 如果黎曼和

$$\sum_{k=1}^n f(\zeta_k)(z(t_k) - z(t_{k-1}))$$

在 $|\phi| \rightarrow 0$ 时有有限的极限, 且与分割 $|\pi|$ 与 ζ_k 的选取无关, 称 f 在 γ 上可积, 此极限记作

$$\int_{\gamma} f(z) dz$$

如果极限 $\sum_{k=1}^n f(\zeta_k)|z(t_k) - z(t_{k-1})|$ 存在, 记作

$$\int_{\gamma} f(z) |dz|$$

定理 3.1.1 如果 $f = u + iv$ 在 γ 上连续, 则

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} (u dx - v dy) + i \int_{\gamma} (v dx + u dy)$$

注 记忆方式: $dz = dx + i dy, f(z) dz = (u + iv)(dx + i dy)$

定理 3.1.2

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt$$

注 类似的有

$$\int_{\gamma} f(z) |dz| = \int_a^b f(z(t)) |z'(t)| dt$$

定理 3.1.3 $D \subset \mathbb{C}$ 为区域, $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ 连续且有原函数 $F(z)$, 则对任意光滑曲线 $\gamma: z = z(t), a \leq t \leq b$ 有

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(z(b)) - F(z(a))$$

注 有原函数意味着全纯, 因此全纯函数的曲线积分与路径无关, 环路积分一定为 0; 反之也可以通过环路积分不为 0 或者积分与路径有关来说明某个函数不是全纯函数。

定理 3.1.4

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \int_{\gamma} |f(z)| |dz|$$

推论 3.1.1 如果 $\sup_{z \in \gamma} |f(z)| = M$, 曲线 γ 长度为 L , 则 $|\int_{\gamma} f(z) dz| \leq ML$.

3.2 柯西积分定理

定理 3.2.1 如果区域 D 的边界由简单可求长闭曲线 $\gamma_0, \gamma_1, \dots$ 组成, 记 $\gamma = \gamma_0 \cup \gamma_1^- \cup \dots$, 则

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

即

$$\int_{\gamma_0} f(z) dz = \sum_k \int_{\gamma_k} f(z) dz$$

注 用于修正积分曲线内部的不纯点。

3.3 复变函数的原函数

定理 3.3.1 如果 $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ 对于 D 中任意简单可求长闭曲线积分都为 0, 则 $f(z)$ 的一个原函数为

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(z) dz$$

推论 3.3.1 f 在单连通区域 D 上全纯, 则有原函数。

定理 3.3.2 设 D 为单连通区域且 $0 \notin D$, 则存在 D 上的全纯函数 $F(z)$ 使得 $e^{F(z)} = z$, 即 $\ln z$ 在 D 上有单值分支。

证明 给定 $z_0 \in D$, 令 $F(z) = \int_{z_0}^z \frac{1}{z} dz + C_0, e^{C_0} = z_0$.

定理 3.3.3 设 D 为单连通区域且 $f(z) \neq 0, z \in D$, 则存在 D 上的全纯函数 $F(z)$ 使得 $e^{F(z)} = f(z)$, 即 $\ln f(z)$ 在 D 上有单值分支。

3.4 柯西积分公式

定理 3.4.1 D 是由可求长简单闭曲线 γ 围成的单连通区域, 如果 $f \in H(D) \cup C(\overline{D})$, 则

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \forall z \in D$$

归纳可证

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta, \forall z \in D, n \geq 0$$

3.5 柯西积分公式的应用

定理 3.5.1 (Cauchy 不等式) 如果 f 在 $B(a, R)$ 上全纯, 且 $\sup_{B(a, R)} |f(z)| = M$, 则

$$|f^{(n)}(a)| \leq \frac{n! \cdot M}{R^n}$$

证明 取 $0 < r < R$, f 在 $\overline{B(a, R)}$ 上全纯, 从而

$$|f^{(n)}(a)| = \left| \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta \right| \leq \frac{n!}{2\pi} \frac{M}{r^{n+1}} 2\pi r = \frac{n! \cdot M}{r^n}$$

令 $r \rightarrow R$ 即可。

定理 3.5.2 (Liouville 定理) 有界整函数必为常数。

证明 设 f 是有界整函数, $\sup|f(z)| = M$, 由定理 3.5.1 可知, $|f'(a)| \leq \frac{M}{R}$, 令 $R \rightarrow +\infty$ 就有 $f'(z) = 0$, 因而一定是常数。

定理 3.5.3 (代数学基本定理) 非常数复系数多项式

$$P(z) = a_n z^n + \cdots + a_0 \quad (a_n \neq 0)$$

在 $\mathbb{C}$ 上必有零点。

证明 假设没有零点,

$$|P(z)| = |a_n z^n| \left| 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} \frac{1}{z} + \cdots + \frac{a_0}{a_n z^n} \right| \rightarrow +\infty, |z| \rightarrow +\infty$$

于是 $|\frac{1}{P(z)}|$ 在区域 $\overline{B(0, R)}$ 上有界, 而且全纯, 所以是常数, 然而 $|P(z)|$ 不是常数, 故矛盾。

定理 3.5.4 (Morera 定理) 如果 f 在区域 D 中连续, 且沿 D 中任意可求长简单闭曲线的积分都为 0, 则 f 在 D 中全纯。

第四章 全纯函数的 Taylor 展开及其应用

4.1 函数列与函数项级数

定义 4.1.1 $K \subset \mathbb{C}$, 称 $f_n : K \rightarrow \mathbb{C}$ 在 K 上一致收敛于 $f : K \rightarrow \mathbb{C}$, 如果 $\forall \varepsilon > 0, \exists N, n > N \Rightarrow |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon, \forall z \in K$.

如果 f_n 在 K 的任意紧致子集上都收敛与 f , 称在 K 中紧一致收敛 (也叫内闭一致收敛)。

定理 4.1.1 (Weierstrass) $f_n : D \rightarrow \mathbb{C}$ 在 D 中紧一致收敛到 f , 则 f 在 D 中全纯, 并且 $\forall k \geq 1, f_n^{(k)}$ 在 D 中也紧一致收敛到 $f^{(k)}$.

定义 4.1.2 $f_n : K \rightarrow \mathbb{C}$, 称函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 K 上一致收敛到 $f(z)$, 如果 $S_n(z) = \sum_{k=1}^n f_k(z)$ 在 K 上一致收敛到 $f(z)$.

定理 4.1.2 (一致收敛的相关性质)

- (1). Cauchy 准则 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 K 上一致收敛
 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N, n > N \Rightarrow |f_n(z) + \cdots + f_{n+p}(z)| < \varepsilon, \forall z \in K, p > 0$.
- (2). Weierstrass 判别法: 设 $|f_n(z)| \leq a_n, \forall z \in K$, 如果 $\forall n$ 有 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$, 则 $S_n(z) = \sum_{k=1}^n f_k(z)$ 在 K 上一致收敛。
- (3). 连续性: $f_n : K \rightarrow \mathbb{C}$ 在 K 上连续, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 K 上一致收敛到 f , 则 f 也在 K 上连续。
- (4). 可积性: $f_n : K \rightarrow \mathbb{C}$ 在 K 上连续, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 K 内可求长曲线 γ 上一致收敛到 f , 则

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\gamma} f_n(z) dz$$

例 4.1.1 定义函数:

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$$

证明 $\zeta(z)$ 在 $D = \{z : \operatorname{Re} z > 1\}$ 中全纯。

证明 设 $z = x + yi$, 于是

$$|z^{-n}| = |e^{z \log n}|^{-1} = |e^{x \log n} e^{yi \cdot \log n}|^{-1} = n^{-x} := a_n$$

于是 $\forall x > 1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$$

由 Weierstrass 判别法, $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ 在 D 上一致收敛, 自然紧一致收敛, 由于 $\frac{1}{n^z}$ 在 D 上全纯, 由 Weierstrass 定理可知 $\zeta(z)$ 在 D 上也全纯。

例 4.1.2 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nz}{n^2}$$

何时收敛?

分析: 令 $z = x + yi$, 如果 $y = 0$, 则收敛, 因为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$$

若 $y > 0$, 则

$$\begin{aligned} \frac{\cos nz}{n^2} &= \frac{1}{2n^2} (e^{inx-ny} + e^{-inx+ny}) \\ &= \frac{1}{2n^2} (e^{-ny} + e^{ny}) \cos nx + i \frac{1}{2n^2} (e^{-ny} - e^{ny}) \sin nx \end{aligned}$$

于是 $n \rightarrow \infty$ 时, 实部甚至都不收敛到 0, 从而不收敛。

4.2 幂级数

定义 4.2.1 形如

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

的级数称为幂级数, 它的通项是幂函数。

简便起见, 只讨论 $z_0 = 0$ 的情况, 一般情况平移即可。对于下列级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

如果存在常数 R , 使得当 $|z| < R$ 时收敛, 当 $|z| > R$ 时发散, 则称其为收敛半径, $\{|z| < R\}$ 称为收敛元。

定理 4.2.1 级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

总存在收敛半径

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

证明 证明：教材 111 页。

定理 4.2.2 (Abel) 如果级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

在 $z = z_0 \neq 0$ 处收敛，则必在 $D = \{z : |z| < |z_0|\}$ 中内闭绝对一致收敛。

证明 设紧集 $K \subset D$ ，选取 $r < |z_0|$ ，使得 $K \subset B(0, r)$ 。¹ 于是 $z \in K \Rightarrow |z| < r$ ，因为

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$$

收敛，所以通项有界： $|a_n z_0^n| < M$ 。于是当 $z \in K$ 时，

$$|a_n z^n| = \left| a_n z_0^n \frac{z^n}{z_0^n} \right| \leq M \frac{|z|^n}{|z_0|^n} \leq M \frac{r^n}{|z_0|^n}$$

因为 $r < |z_0|$ ，故由 Weierstrass 判别法可知

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n|$$

在紧集 K 上一致收敛。于是定理得证。

推论 4.2.1 幂级数在其收敛圆内确定一个全纯函数。

这是因为，由定理 4.2.2 可知幂级数在其收敛圆内是内闭一致收敛的，进而由定理 4.1.1 可知和函数是收敛圆内的全纯函数。

但是，我们只知道幂级数在大于、小于收敛半径时的敛散性，那么在其收敛圆周上的收敛性如何？对此，我们先给出非切向极限的定义。

定义 4.2.2 设 g 是定义在单位圆上的函数，点 $z_0 = e^{i\theta_0}$ 是单位圆上一点，定义四边形区域 $S_\alpha(z_0)$ 为以半径 Oz 作为斜边，做出的两个对称直角三角形 OAz 和 OBz ，夹角 $\angle OzA$ 和 $\angle OzB$ 大小都是 α ， $\alpha < \frac{\pi}{2}$ 。

如果当 z 在 $S_\alpha(z_0)$ 中趋于 z_0 时， $g(z)$ 有极限 l ，则称 g 在 z_0 处有非切向极限²。

$$\lim_{z \rightarrow e^{i\theta_0}, z \in S_\alpha(e^{i\theta_0})} g(z) = l$$

定理 4.2.3 (Abel 第二定理) 级数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

收敛半径为 $R = 1$ ，且级数在 $z = 1$ 处收敛于 S ，那么 f 在 $z = 1$ 有非切向极限 S ，即

$$\lim_{z \rightarrow 1, z \in S_\alpha(1)} g(z) = l$$

¹ K 是紧集保证了 r 的存在性，这一点是由有限覆盖定理得到的。作业题 7.1.6 用到了这一点。

²直观上看， $\alpha = \frac{\pi}{2}$ 时是切向极限，这里我们偏要不让它取切向极限，所以限定了 $\alpha < \frac{\pi}{2}$ ，实际上只有这样才能保证四边形区域在单位圆内。

注 这个定理意味着和函数在收敛圆周上收敛的点处是连续的。

例 4.2.1 级数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n}$$

的收敛半径是 $R = 1$, 简单计算可知

$$f(z) = -\log(1-z), z \in B(0, 1)$$

这个级数在收敛圆周上, 除了点 $z = 1$ 之外都收敛³, 故由 Abel 第二定理, $z = e^{i\theta} \neq 1$ 时可以直接代入得到

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{in\theta}}{n} = -\log(1 - e^{i\theta}) = -\log|1 - e^{i\theta}| - i\arg(1 - e^{i\theta}) = -\log(2\sin\frac{\theta}{2}) + i\frac{\pi - \theta}{2}$$

比较实虚部, 我们就得到了下列结论:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n} = -\log(2\sin\frac{\theta}{2})$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n} = \frac{\pi - \theta}{2}$$

上述等式都在 $0 < \theta < 2\pi$ 时成立。

4.3 全纯函数的 Taylor 展开

定理 4.3.1 若 $f \in H(B(z_0, R))$, 则 f 可以在 $B(z_0, R)$ 中展开成幂级数:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n, z \in B(z_0, R)$$

这被称为 Taylor 级数。

推论 4.3.1 $f(z)$ 在 z_0 处全纯的充要条件是 f 在 z_0 的邻域内可以被展开成 Taylor 级数。

定义 4.3.1 f 在 z_0 邻域内展开成的 Taylor 级数如果形如

$$f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n, z \in B(z_0, R)$$

且 $f^{(m)}(z_0) \neq 0$, 则称 z_0 是 f 的 m 阶零点, 等价于 f 在 z_0 邻域内可以表示为

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z)$$

且 $g(z)$ 在 z_0 处全纯且非 0.

³这个结论可以通过 Dirichlet 判别法得到。

定理 4.3.2 (零点的孤立性) f 在域 D 上全纯且不恒为零, 则 f 在 D 上的零点是孤立的。即, 若 $f(z_0) = 0$, 则存在去心邻域 $B(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\}$, 使得 $f(z) \neq 0$ 。

定理 4.3.3 (唯一性定理) 如果 f_1, f_2 都在域 D 上全纯, 如果存在 D 上的收敛点列 $\{z_n\}$, 且 $z_n \rightarrow z \in D$, 使得

$$f_1(z_n) = f_2(z_n), \forall n$$

则 $f_1 = f_2$ 。

4.4 辐角原理与鲁歇定理

定理 4.4.1 $f \in H(D)$, γ 是 D 中可求长简单闭曲线, γ 内部位于 D 中。如果 f 在 γ 上无零点, 在 γ 内部有零点 $a_1, a_2, \dots, a_n$, 阶数分别为 $m_1, \dots, m_k$, 于是

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{k=1}^n m_k$$

推论 4.4.1 (辐角原理) $f \in H(D)$, γ 是 D 中可求长简单闭曲线, γ 内部位于 D 中。如果 f 在 γ 上无零点, 闭曲线 $f(\gamma)$ 绕远点转的圈数等于 f 在 γ 内部的零点个数。

定理 4.4.2 (Rouche) $f, g \in H(D)$, γ 是 D 中可求长简单闭曲线, γ 内部位于 D 中。如果当 $z \in \gamma$ 时,

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)|$$

则 f 和 g 在 γ 内部的零点个数一样。

定理 4.4.3 设 $f \in H(D)$, $z_0 \in D$, $w_0 = f(z_0)$, 如果 z_0 时 $f(z) - w_0$ 的 m 阶零点, 则存在 $\rho_0 > 0$, 对于任意的 $0 < \rho < \rho_0$, 存在 $\delta = \delta(\rho) > 0$, 使得对于任意的 $a \in B(w_0, \delta)$, $a \neq w_0$, $f(z) - a$ 在 $B(z_0, \rho)$ 中恰有 m 个零点。

这里的逻辑很绕。对于 $f(z) - w_0$, 如果有 m 阶零点 z_0 , 那么考虑 z_0 的某个邻域 $B(z_0, \rho)$, 使得任意与 w_0 “相差” 不多 (这个 “相差” 程度 δ 只和 ρ 有关) 的复数 $a \in B(w_0, \delta)$, 使得 $f(z) - a$ 在 z_0 邻域内有 m 个的零点。定理告诉我们满足以上性质的 ρ 构成了一个集合 $\{0 < \rho < \rho_0\}$, ρ_0 是存在的。

上面这个定理实际上证明了:

推论 4.4.2 $f \in H(D)$, $z_0 \in D$, $w_0 = f(z_0)$, 则对于充分小的 $\rho > 0$, 一定存在 $\delta > 0$, 使得

$$f(B(z_0, \rho)) \supset B(w_0, \delta)$$

定理 4.4.3 有很多其他的应用。

定理 4.4.4 (开映射定理) f 是域 D 上非常数的全纯函数, 则 $f(D)$ 也是域。

定理 4.4.5 f 是域 D 上单叶的全纯函数⁴, 则 $f'(z) \neq 0, \forall z \in D$ 。

反过来, 如果 f 是域 D 上的全纯函数, 如果 $f'(z_0) \neq 0$, 则 f 在 z_0 的邻域中是单叶的。

⁴也被称为双全纯函数

定理 4.4.6 f 是域 D 上单叶的全纯函数 $f(D) = G$, 则反函数 f^{-1} 也是 G 上的全纯函数, 且

$$(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(f^{-1}(w))}, w \in G$$

定理 4.4.7 (Hurwitz) $\{f_n\}$ 是域 D 上的一列全纯函数且内闭一致收敛到不恒为 0 的函数 f . 设 γ 是 D 中一条可求长简单闭曲线, γ 内部位于 D 中, 且不经过 f 的零点. 那么必存在正整数 N , 当 $n \geq N$ 时, f_n 和 f 在 γ 内部零点个数相同。

推论 4.4.3 $\{f_n\}$ 是域 D 上的一列单叶全纯函数且内闭一致收敛到不恒为常数的函数 f , 则 f 也是单叶全纯函数。

4.5 最大模原理和 Schwarz 引理

定理 4.5.1 f 在区域 D 上是非常值全纯函数, 则 $|f(z)|$ 在 D 中取不到最大值,

证明 设 $f(D) = G$, 由开映射定理可知 G 是域。

假设取到最大值 $|f(z_0)|$, 记 $w_0 = f(z_0)$, 则 w_0 是 G 的一个内点, 存在 $\varepsilon > 0$ 使得 $B(w_0, \varepsilon) \subset G$, 故必存在 $w_1 \in G$ 使得 $|w_1| > |w_0|$, 矛盾。

简而言之, 开集是找不到模长最大的那个点的。

于是立刻得到:

定理 4.5.2 (最大模原理) D 是有界区域, $f \in H(D) \cap C(\overline{D})$, 且 f 在 D 上不是常数, 则 $|f(z)|$ 的最大值在 ∂D 且只能在 ∂D 上取到。

定理 4.5.3 (Schwarz 引理) 设 $f \in H(B(0, 1))$, 且满足条件:

(1) $z \in B(0, 1)$ 时有 $|f(z)| \leq 1$.

(2) $f(0) = 0$.

则下列结论成立:

(1) $\forall z \in B(0, 1)$ 有 $|f(z)| \leq |z|$.

(2) $|f'(0)| \leq 1$.

(3) 如果存在非原点的 $z_0 \in B(0, 1)$ 使得 $|f(z_0)| = |z_0|$, 或者 $|f'(0)| = 1$ 成立, 则存在某个实数 θ 使得

$$f(z) = e^{i\theta} z, z \in B(0, 1)$$

Schwarz 引理的一个重要结论就是确定了单位圆盘上的全纯自同构群。⁵

定理 4.5.4 $f \in \text{Aut}(B(0, 1))$, 且 $f^{-1}(0) = a$, 则必存在 $\theta \in \mathbb{R}$ 使得

$$f(z) = e^{i\theta} \frac{a - z}{1 - \bar{a}z}$$

也就是说,

$$\text{Aut}(B(0, 1)) = \{f(z) = e^{i\theta} \varphi_a(z) | \theta \in \mathbb{R}, |a| \in 1, \varphi_a(z) = \frac{a - z}{1 - \bar{a}z}\}$$

⁵全纯自同构就是把区 D 域映为 D 的单叶全纯函数, 在复合运算下构成群, 记作 $\text{Aut}(D)$.

Schwarz 引理可以推广。

定理 4.5.5 (Schwarz-Pick) $f : B(0, 1) \rightarrow B(0, 1)$ 全纯, 对于 $a \in B(0, 1)$, $f(a) = b$, 那么

(1) $\forall z \in B(0, 1), |\varphi_b \circ f(z)| \leq |\varphi_a(z)|$.

(2) $\frac{|f'(z)|}{1-|f(z)|^2} \leq \frac{1}{1-|z|^2}$

(3) 如果 (1) 或者 (2) 中的等号成立, 则 $f \in \text{Aut}(B(0, 1))$.

第五章 全纯函数的 Laurent 展开及其应用

5.1 Laurent 展开

定理 5.1.1 如果 Laurent 级数

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=-1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n}$$

的收敛域是圆环 $D = \{z : r < |z - z_0| < R\}$, 那么它在 D 中绝对收敛且内闭一致收敛, 和函数在 D 中全纯。

定理 5.1.2 圆环 $D = \{z : r < |z - z_0| < R\}$, $f \in H(D)$, 那么 f 在 D 上可以展开为 Laurent 级数

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

其中

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$$

$\gamma_\rho = \{z : |z - z_0| = \rho\} (r < \rho < R)$. 且此展开唯一。

例 5.1.1 一个典型的 Laurent 展开:

$$\frac{f(z) = \frac{1}{z-a}}{\left| \begin{array}{c} D = B(0, a) \setminus \{0\} \\ \sum_{n=0}^{\infty} (-a^{-n-1}) z^n \end{array} \right|} \left| \begin{array}{c} D = B(\infty, a) \setminus \{0\} \\ \sum_{n=1}^{\infty} a^{n-1} z^{-n} \end{array} \right|$$

5.2 孤立奇点

5.2.1 孤立奇点为有限点

定义 5.2.1 如果 f 在无心圆盘 $\{z : 0 < |z - z_0| < R\}$ 中全纯, 就称 z_0 是 f 的孤立奇点。有三种可能的情形:

(1) $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = a$, 可去奇点。

(2) $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$, 极点。

(3) $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ 不存在, 本性奇点。

定理 5.2.1 (Riemann) z_0 是 f 的可去奇点 $\Leftrightarrow f$ 在 z_0 附近有界, 且在 $\{z: 0 < |z - z_0| < R\}$ 上的 Laurent 展开式为

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

定理 5.2.2 z_0 是 f 的极点 $\Leftrightarrow z_0$ 是 $\frac{1}{f}$ 的零点。

定义 5.2.2 如果 z_0 是 $\frac{1}{f}$ 的 m 阶零点, 则称之为 f 的 m 阶极点。

定理 5.2.3 z_0 是 f 的 m 阶极点 $\Leftrightarrow f$ 在 z_0 附近的 Laurent 展开式为

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, a_{-m} \neq 0$$

定理 5.2.4 (Weierstrass) 设 z_0 是 f 的本性奇点, 对于任意的 $A \in \mathbb{C}_{\infty}$, 必然存在趋近于 z_0 的点列 z_n 使得 $f(z_n) \rightarrow A$.

5.2.2 孤立奇点为无穷远点

定义 5.2.3 如果 f 在 $\{z: 0 \leq R < |z - z_0| < \infty\}$ 中全纯, 就称 ∞ 是 f 的孤立点, 在这种情况下, 记

$$g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$$

则 g 在 $\{0 < |z| < \frac{1}{R}\}$ 上全纯, 即 0 是 g 的孤立奇点。

如果 0 是 g 的可去奇点、 m 阶极点、本性奇点, 相应地称 ∞ 是 f 的可去奇点、 m 阶极点、本性奇点。

5.3 整函数与亚纯函数

定理 5.3.1 在无穷远点处全纯的整函数一定是常数。

证明 整函数能在 $\mathbb{C}$ 上 Taylor 展开:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

可以看作是无穷远点领域 $\{R < |z| < \infty\}$ 中的 Laurent 展开。考虑

$$g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$$

则 g 在 $\{0 < |z| < \frac{1}{R}\}$ 上全纯, f 在无穷远点处全纯, 此时 0 是 g 的可去奇点或全纯, 无论如何, 由定理 5.2.1, $a_{-1} = a_{-2} = \cdots = 0$, 因此

$$b_n = a_{-n} = 0, \forall n \geq 1$$

所以 $f(z) = b_0$, 是一常数。

定理 5.3.2 如果无穷远点是整函数 f 的一个 m 阶极点, 则 f 是一个 m 次多项式。

证明 利用定理 5.2.3.

定义 5.3.1 不是常数和多项式的整函数, 称为超越正函数。无穷远点一定是超越整函数的本性奇点, 例如 $e^z, \sin z, \cos z$.

如果 f 在整个复平面上除去极点之外没有其他极点, 则称 f 是一个亚纯函数, 例如整函数一定是亚纯函数, 而有理函数

$$f(z) = \frac{P_n(z)}{Q_m(z)}$$

也是亚纯函数, 这里 P_n, Q_m 是两个既约的多项式, 而无穷远点或是其可去奇点, 或是其极点, 因为

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \begin{cases} \frac{a_n}{b_m}, & n = m \\ \infty, & n > m \\ 0, & n < m \end{cases}$$

定理 5.3.3 对于一个亚纯函数 f , 其无穷远点是可去奇点或是极点, 则 f 一定是有理函数。

应用上述三个定理, 我们得到

定理 5.3.4 $\text{Aut}(\mathbb{C})$ 由所有一次多项式组成, $\text{Aut}(\mathbb{C}_\infty)$ 由所有分式线性变换组成。

5.4 残数定理

定义 5.4.1 设 a 是 f 的一个孤立奇点, f 在 a 的邻域 $B(a, r)$ 中的 Laurent 展开为

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$$

称 c_{-1} 为 f 在 a 点的残数或留数, 记为

$$\text{Res}(f, a) = c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz$$

这里 $\gamma = \{z : |z-a| = \rho\} (0 < \rho < r)$.

对于无穷远点, 若 $z = \infty$ 是 f 的孤立奇点, 即 f 在 $R < |z| < \infty$ 中全纯, 我们定义

$$\text{Res}(f, \infty) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz$$

这里 $\gamma = \{z : |z| = \rho\} (R < \rho < \infty)$.

很多情况下, 函数在孤立奇点处的 Laurent 展开式不易得到, 我们在这里给出不知道 Laurent 展开式情况下计算残数的方法。

定理 5.4.1 若 a 是 f 的 m 阶极点, 则

$$\operatorname{Res}(f, a) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z-a)^m f(z)]$$

特别地, $m=1$ 时

$$\operatorname{Res}(f, a) = \lim_{z \rightarrow a} (z-a)f(z)$$

定理 5.4.2 设 $f = \frac{g}{h}$, g 和 h 都在 a 处全纯, 且 $g(a) \neq 0, h(a) = 0, h'(a) \neq 0$, 那么

$$\operatorname{Res}(f, a) = \frac{g(a)}{h'(a)}$$

证明 利用定理 5.4.1.

定理 5.4.3 (残数定理) 设 D 是复平面上的有界区域, 其边界 γ 由一条或若干条简单闭曲线组成, 如果 f 在 D 中除去孤立奇点 $z_1, \dots, z_n$ 之外是全纯的, 在闭域 $\overline{D}$ 上除去 $z_1, \dots, z_n$ 外是连续的, 那么

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}(f, z_k)$$

证明 利用定理 3.2.1 和定理 5.4.1.

残数定理也可以写成下面的形式:

定理 5.4.4 若 f 在 $\mathbb{C}$ 中除去 $z_1, \dots, z_n$ 外是全纯的, 则 f 在 $z_1, \dots, z_n$ 及 $z = \infty$ 处的残数之和为零。

5.5 利用残数定理计算定积分

5.5.1 无穷型积分

核心思想: 画直径趋于实轴的半圆, 再减去半圆弧上的积分。前者即上半平面, 如果后者是 0, 则只需考虑上半平面的极点即可。

定理 5.5.1 $A = \{a_1, \dots, a_n\}$, 如果 f 在上半平面除去 A 之外全纯, 在上半平面和实轴上除去 A 之外连续, 且

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z f(z) = 0$$

则

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}(f, a_k)$$

定理 5.5.2 (Jordan) f 在 $D = \{z : R_0 \leq |z| < \infty, \operatorname{Im} z \geq 0\}$ 上连续, 且

$$\lim_{z \rightarrow \infty, \operatorname{Im} z \geq 0} f(z) = 0$$

则对于 $\forall \alpha > 0$, 有

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} e^{i\alpha z} f(z) dz = 0$$

这里 $\gamma_R = \{z : z = Re^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq \pi, R \geq R_0\}$

定理 5.5.3 $A = \{a_1, \dots, a_n\}$, 如果 f 在上半平面除去 A 之外全纯, 在上半平面和实轴上除去 A 之外连续, 且

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$$

则对于 $\forall \alpha > 0$, 有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(e^{i\alpha z} f(z), a_k)$$

下面这个定理用于修正实轴上的极点。

定理 5.5.4 f 在去心半圆域

$$G = \{z = a + \rho e^{i\theta} : 0 < \rho \leq r, \theta_0 \leq \theta \leq \theta_0 + \alpha\}$$

上连续, 且

$$\lim_{z \rightarrow a} (z - a) f(z) = A$$

那么

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\gamma_\rho} f(z) dz = iA\alpha$$

这里 $\gamma_\rho = \{z = a + \rho e^{i\theta} : \theta_0 \leq \theta \leq \theta_0 + \alpha\}$, 沿辐角增加的方向。

5.5.2 半无穷型积分

如果积分式里包含 x^p , 而 p 不是整数, 这时要借助对数函数取出单值全纯分支。

例 5.5.1 计算

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{(1+x)^m} dx$$

m 是正整数, p 不是整数, $0 < p < m$.

解 令

$$f(z) = \frac{z^{p-1}}{(1+z)^m}$$

因为 p 不是整数, 所以

$$z^{p-1} = e^{(p-1)\text{Log}z}$$

是一个多值函数, 取正实轴作割线得一域, z^{p-1} 在这个域中能分出单值的全纯分支, 即

$$D = \{z = re^{i\theta} : r > 0, 0 < \theta < 2\pi\}$$

取在正实轴上沿取实值的全纯分支, 即主支 $z^{p-1} = e^{(p-1)\log z}$, 让 $f(z)$ 沿以下闭曲线 Γ 积分:

(1) γ_1 : 先沿实数轴上沿, 从 r 向右水平移动到 R :

$$r + 0i \rightarrow R + 0i$$

(2) γ_2 : 原点为中心, R 为半径, 逆时针方向移动到实数轴下沿:

$$z = Re^{i\theta}, \theta : 0^+ \rightarrow 2\pi^-$$

(3) γ_3 : 再沿实数轴下沿, 从 R 向左水平移动到 r :

(4) γ_4 : 原点为中心, r 为半径, 顺时针方向移动到实数轴上沿, 回到出发点。
现在来分析各段曲线上的 $f(z)$, 第一段:

$$z = x + 0i, f(z) = \frac{e^{(p-1)\log x}}{(1+x)^m} = \frac{x^{p-1}}{(1+x)^m}$$

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_r^R \frac{x^{p-1}}{(1+x)^m} dx$$

第二段: 令 $\gamma_2: z = Re^{i\theta}$, $\theta: 0 \rightarrow 2\pi$,

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_2} f(z)dz &= \int_0^{2\pi} f(Re^{i\theta})Rie^{i\theta}d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{e^{(p-1)(\log R + i\theta)}}{(1 + Re^{i\theta})^m} Rie^{i\theta}d\theta \\ \left| \int_{\gamma_2} f(z)dz \right| &\leq \int_0^{2\pi} \left| \frac{e^{(p-1)(\log R + i\theta)}}{(1 + Re^{i\theta})^m} Rie^{i\theta} \right| d\theta \\ &\leq \int_0^{2\pi} \left| \frac{e^{(p-1)\log R}}{(1 + R)^m} R \right| d\theta \\ &= 2\pi \frac{R^p}{(1 + R)^m} \rightarrow 0 \text{ as } R \rightarrow \infty \end{aligned}$$

第三段:

$$\begin{aligned} z = x - 0i, f(z) &= \frac{x^{p-1}e^{(p-1)2\pi i}}{(1+x)^m} = e^{2p\pi i} \frac{x^{p-1}}{(1+x)^m} \\ \int_{\gamma_3} f(z)dz &= -e^{2p\pi i} \int_r^R \frac{x^{p-1}}{(1+x)^m} dx \end{aligned}$$

第四段: 令 $\gamma_4: z = re^{i\theta}$, $\theta: 2\pi \rightarrow 0$, 同理有

$$\left| \int_{\gamma_4} f(z)dz \right| \leq 2\pi \frac{r^p}{(1+r)^m} \rightarrow 0 \text{ as } r \rightarrow 0$$

R 充分大, r 充分小, 考虑整个 Γ 围成的域, 只有一个 m 阶极点 $z = -1$, 由残数定理:

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = 2\pi i \text{Res}(f(z), -1)$$

而根据上面对曲线各段的分析可见, $R \rightarrow \infty$ 且 $r \rightarrow 0$ 时:

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = (1 - e^{2p\pi i}) \int_0^{\infty} \frac{x^{p-1}}{(1+x)^m} dx$$

所以

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{p-1}}{(1+x)^m} dx = \frac{1}{1 - e^{2p\pi i}} 2\pi i \text{Res}(f(z), -1)$$

当 $m = 1$ 时,

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x} dx = \frac{1}{1-e^{2p\pi i}} 2\pi i (-e^{p\pi i}) = \frac{-2\pi i}{e^{-p\pi i} - e^{p\pi i}} = \frac{\pi}{\sin p\pi}$$

当 $m > 1$ 时,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{(1+x)^m} dx &= \frac{1}{1-e^{2p\pi i}} 2\pi i \left(-\frac{1}{(m-1)!} (1-p)(2-p)\cdots(m-1-p)e^{p\pi i} \right) \\ &= \frac{\pi}{\sin p\pi} \frac{1}{(m-1)!} (1-p)(2-p)\cdots(m-1-p) \end{aligned}$$

上面的方法可以用来计算一般的积分:

$$\int_0^\infty f(x)x^{p-1}dx \quad (0 < p < 1)$$

例 5.5.2 计算

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{(1+x^2)^2} dx$$

解 选取

$$f(z) = \frac{\log^2 z}{(1+z^2)^2}$$

(为什么分子上要取平方呢, 待会儿就知道了。)

仍然选取上一个例子中的曲线 Γ , 第一段:

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_r^R \frac{\log^2 x}{(1+x^2)^2} dx$$

第三段:

$$\int_{\gamma_3} f(z) dz = - \int_r^R \frac{(\log x + 2\pi i)^2}{(1+x^2)^2} dx$$

两段加起来会发现消掉了平方项:

$$\int_{\gamma_1 + \gamma_3} f(z) dz = \int_r^R \frac{-4\pi i \cdot \log x + 4\pi^2}{(1+x^2)^2} dx$$

同样的可以证明 $R \rightarrow \infty$, $r \rightarrow 0$, 另外两端都是趋于 0 的。考虑整个 Γ 围成的区域, $f(z)$ 有两个 2 阶极点 $\pm i$. 由留数定理

$$\int_\Gamma f(z) dz = \int_0^\infty \frac{-4\pi i \cdot \log x + 4\pi^2}{(1+x^2)^2} dx = 2\pi i (\text{Res}(f(z), i) + \text{Res}(f(z), -i)) = \pi^2 i (1 - \pi i)$$

所以

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{(1+x^2)^2} dx = \frac{1}{-4i} [\pi i (1 - \pi i) - \int_0^\infty \frac{4\pi}{(1+x^2)^2} dx]$$

后面这个积分，可以用上一节的方法计算：

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)^2} dx &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{(1+x^2)^2} dx \\ &= \pi i \operatorname{Res}\left(\frac{1}{(1+z^2)^2}, i\right) = \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

其实不算也行，因为肯定是实数。

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{(1+x^2)^2} dx = \frac{1}{-4i}(\pi i + \pi^2 - \pi^2) = -\frac{\pi}{4}$$

还有另外一种方法，选取

$$f(z) = \frac{\log z}{(1+z^2)^2}$$

0 是一个奇点，选择把 Γ 选择为去心上半圆环 D 的边界：

$$D = \{z = \rho e^{i\theta} : 0 < r \leq \rho \leq R, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

于是 Γ 可以分成四段，外侧圆弧沿顺时针、内侧圆弧沿逆时针。区域 D 内只有一个 2 阶极点 i ，由留数定理：

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \cdot \operatorname{Res}(f, i) = \frac{\pi i}{4}(\pi + 2i)$$

同时，令 $r \rightarrow 0$, $R \rightarrow \infty$,

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma} f(z) dz &= \int_r^R f(z) dz + \int_r^R f(-z) dz - \int_{\gamma_r} f(z) dz + \int_{\gamma_R} f(z) dz \\ &= \int_0^\infty \frac{\log x}{(1+x^2)^2} dx + \int_0^\infty \frac{\log x + \pi i}{(1+x^2)^2} dx \\ &= 2 \int_0^\infty \frac{\log x}{(1+x^2)^2} dx - \frac{\pi^2}{4} i\end{aligned}$$

最后算出来结果

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{(1+x^2)^2} dx = -\frac{\pi}{4}$$

和上一种方法一样。

5.5.3 有限积分

有理三角函数式

$$I = \int_0^{2\pi} R(\sin\theta, \cos\theta) d\theta$$

其中 R 是二元有理函数，这种类型的积分可以化成无穷型积分：实际上，

$$I = \int_0^{2\pi} R(\sin\theta, \cos\theta) d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} R(\sin\theta, \cos\theta) d\theta$$

于是作变换 $t = \tan \frac{\theta}{2}$, 则

$$I = 2 \int_{-\infty}^{\infty} R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{1}{1+t^2} dt$$

或者转化成单位圆上的积分, 设 $z = e^{i\theta}$, 于是

$$I = \int_{|z|=1} R\left(\frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z}\right)\right) \frac{1}{iz} dz$$

用残数定理来处理单位圆周内的极点即可。

贝塔函数式

$$\int_a^b (x-a)^t (b-x)^s f(x) dx$$

这里满足 $-1 < r, s < 1, r+s=0$ 或 ± 1 , 对于这种积分, 应用下面这个定理:

定理 5.5.5 $A = \{a_1, \dots, a_n\}$, f 在整个复平面上除去 A 之外全纯, $A \cap [a, b] = \emptyset$, 设 $-1 < r, s < 1, s \neq 0$ 且 $r+s$ 是整数, 如果

$$\lim_{r \rightarrow \infty} z^{r+s+1} f(z) = A \neq \infty$$

则

$$\int_a^b (x-a)^r (b-x)^s f(x) dx = -\frac{A\pi}{\sin s\pi} + \frac{\pi}{e^{-s\pi i} \sin s\pi} \sum_{k=1}^n \text{Res}(F, a_k)$$

这里 $F(z) = (z-a)^r (b-z)^s f(z)$.

5.5.4 两个特殊的积分

Fresnel

$$\int_0^{\infty} \cos x^2 dx$$

$$\int_0^{\infty} \sin x^2 dx$$

Poisson

$$\int_0^{\infty} e^{-ax^2} \cos bx dx$$

5.6 插值定理与因子分解定理

本课程难度所限，我们只研究整个复平面上的函数。

本节我们讨论的问题是：对于一个非常数的整函数而言，它的零点能否有无穷个？对于一个亚纯函数而言，它的极点能否有无穷个？如何给出上述条件下的显式构造？

定理 5.6.1 (Mittag-Leffler 插值定理) 设 $\mathbb{C}$ 上的点列 $\{z_n\}$ 满足： $|z_1| \leq |z_2| \leq \dots$ 且 $|z_n| \rightarrow \infty$ ，设

$$\psi_n(z) = \sum_{j=1}^{k_n} c_{n,j} (z - z_n)^{-j}$$

则存在 $\mathbb{C}$ 上的亚纯函数 f ，恰以 $\{z_n\}$ 为极点，阶数分别是 $\{k_n\}$ ，在 z_n 处的 Laurent 展开式的主要部分为 $\psi_n(z)$ 。

引理 5.6.1 设 $f(z)$ 为整函数，且没有零点，则存在整函数 $g(z)$ 使得 $f(z) = e^{g(z)}$ 。

证明 没看懂这证明是什么玩意儿

定理 5.6.2 (Weierstrass 因子分解定理) 设 $f(z)$ 是整函数，零点为： $0, \dots, 0, a_1, a_2, \dots$ 且 $0 < |a_1| \leq |a_2| \leq \dots$ ，则 $f(z)$ 可以表示为：

$$f(z) = z^m e^{h(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \dots + \frac{1}{n-1}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{n-1}}$$

其中 $h(z)$ 是整函数。

定义 5.6.1 设 $f(z)$ 是整函数，记

$$M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$$

若存在 $\lambda > 0$ 使得对充分大的 $r > 0$ 有 $M(r) < e^{r^\lambda}$ ，则称 $f(z)$ 有有限的增长阶数，称 $\rho = \inf \lambda$ 为 $f(z)$ 的增长阶数。

例 5.6.1 设 $f(z) = a_m z^m + \dots + a_0$ ，对于 $\forall \lambda > 0$ ， r 充分大时都有

$$M(r) < Ar^m < e^{r^\lambda}$$

因此 $\rho = \inf \lambda = 0$ 。

设 $f(z) = e^{z^m}$ ，只要 $\lambda > m$ ， r 充分大时就有

$$M(r) = \max_{z=re^{i\theta}} |f(z)| = \max_{\theta \in [0, 2\pi)} e^{r^m \cos m\theta} \leq e^{r^m} < e^{r^\lambda}$$

$\lambda \leq m$ 时则不行。所以 $\rho = \inf \lambda = m$ 。

定理 5.6.3 增长阶数和零点分布的关系：设 $f(z)$ 是增长阶数为 ρ 的整函数， $a_n \neq 0$ 为 $f(z)$ 所有非零的零点，则对于 $\forall \varepsilon > 0$ ，级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^{\rho+\varepsilon}} < +\infty$$

定理 5.6.4 (Hadamard) 设 $f(z)$ 为增长阶数为 ρ 的整函数, k 为正整数且 $k \leq \rho < k+1$. 设 $a_n \neq 0$ 为 $f(z)$ 的所有非零的零点, 则存在次数小于等于 k 的多项式 $h(z)$, 使得

$$f(z) = z^m e^{h(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \dots + \frac{1}{n-1}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{n-1}}$$

例 5.6.2 设 $f(z)$ 为有限阶整函数, 则 $f(z)$ 可以取到每一个有穷复数, 至多可能有一个例外。

证明 设存在不同的两个取不到的有穷复值 α 和 β , 则 $f(z) - \alpha$ 无零点, 由 Hadamard 定理, 存在多项式 $h(z)$ 使得 $f(z) = \alpha + e^{h(z)}$, 于是 $e^{h(z)} \neq \beta - \alpha$, 即 $h(z) \neq \log(\beta - \alpha)$, 与代数学基本定理矛盾。

例 5.6.3 将 $f(z) = \sin(\pi z)$ 展开为无穷级数。

解 由定义, $\sin(\pi z) = \frac{1}{2i}(e^{\pi iz} - e^{-\pi iz})$, 而 $|e^z| \leq e^{|z|}$, 故 $|\sin(\pi z)| \leq \frac{1}{2}(e^{\pi|z|} + e^{\pi|z|}) = e^{\pi|z|}$, 故 $M(r) \leq e^{\pi r} \Rightarrow \rho \leq 1$.

另一方面, r 充分大的时候 $|\sin(\pi ir)| = \frac{1}{2}(e^{\pi r} - e^{-\pi r}) \geq \frac{1}{4}e^{\pi r}$, 故 $M(r) > \frac{1}{4}e^{\pi r} \Rightarrow \rho = 1$.

同时, $\sin(\pi z)$ 的零点是 $0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 所以由 Hadamard 定理, 存在一个 1 次多项式 $h(z) = Az + B$, 使得:

$$\sin(\pi z) = z \cdot e^{Az+B} \prod_{n=1}^{\infty} \left[\left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n}} \left(1 - \frac{z}{-n}\right) e^{\frac{z}{-n}} \right] = ze^{Az+B} \prod \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$$

而因为

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi z)}{z} = \pi = e^B$$

和

$$\frac{\sin(\pi z)}{z} = \frac{\sin(\pi(-z))}{-z} \Rightarrow A = 0$$

所以

$$\sin(\pi z) = \pi z \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$$

第六章 全纯开拓

定义 6.0.1 设 $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ 全纯, 若存在 $D \subsetneq G$ 以及全纯函数 $F: D \rightarrow \mathbb{C}$, 且 $F|_G = f$, 则称 F 为 f 的一个全纯开拓。

例 6.0.1 设

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \text{ on } \{|z| < 1\}, F(z) = \frac{1}{1-z} \text{ on } \{z \neq 1\}$$

于是 $F(z)$ 就是 $f(z)$ 的一个全纯开拓。

6.1 Schwarz 对称原理

定理 6.1.1 (Schwarz 对称原理) 设区域 D 关于实轴对称, 如果 f 满足:

- (1) f 在 $D \cap \{z | \operatorname{Im} z > 0\}$ 中全纯;
- (2) f 在 $D \cap \{z | \operatorname{Im} z \geq 0\}$ 中连续;
- (3) $f(D \cap \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$.

那么

$$F(z) = \begin{cases} f(z) & , z \in D \cap \{z | \operatorname{Im} z \geq 0\} \\ \overline{f(\bar{z})} & , z \in D \cap \{z | \operatorname{Im} z < 0\} \end{cases}$$

便是 f 在 D 上的全纯开拓。

例 6.1.1 圆环 $D = \{z \in \mathbb{C} | r_1 < |z| < r_2\}$ 和 $G = \{z \in \mathbb{C} | R_1 < |z| < R_2\}$ 双全纯等价 (也叫共形等价), 当且仅当 $\frac{r_2}{r_1} = \frac{R_2}{R_1}$, 当且仅当双全纯映射 $f: D \rightarrow G$ 一定满足 $f(z) = e^{i\theta} \frac{R_2}{r_2} z$ 或 $f(z) = e^{i\theta} \frac{r_1 R_2}{z}$.

特别的, 圆环 D 上的全纯自同构群为

$$\operatorname{Aut}(D) = \{e^{i\theta} z, e^{i\theta} \frac{r_1 r_2}{z} | \theta \in \mathbb{R}\}$$

解

定理 6.1.2 (Schwarz 对称原理推广) 设 $\mathbb{C}_\infty$ 中的区域 D 关于圆周 $\gamma = \{|z - z_0| = r\}$ 对称, 于是 $\mathbb{C}_\infty$ 被 γ 分成两个单连通域, 设为 $\mathbb{C}_\infty^+(\gamma)$ 和 $\mathbb{C}_\infty^-(\gamma)$, 如果 f 满足:

- (1) f 在 $D \cap \mathbb{C}_\infty^+(\gamma)$ 上全纯, 且连续到 γ 上;
- (2) $f(D \cap \gamma) \subset \Gamma$, Γ 为圆周, 设其以 w_0 为圆心;
- (3) $\forall z \in D \cap \mathbb{C}_\infty^+(\gamma), f(z) \neq w_0$.

那么 f 能全纯开拓到 D 上, 称为 D 上的全纯函数 F , F 将 D 中关于 γ 对称的两点映为 $F(D)$ 中关于 Γ 对称的两点。

$$F(z) = \begin{cases} f(z) & , z \in D \cap \mathbb{C}_\infty^+(\gamma) \cup \gamma \\ f(z^{*(\gamma)})^{*(\Gamma)} & , z \in D \cap \mathbb{C}_\infty^-(\gamma) \end{cases}$$

6.2 幂级数的全纯开拓

定义 6.2.1 设级数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

的收敛半径为 $R > 0$, 去 $\zeta \in \partial B(0, R)$, 在线段 0ζ 上取点 $z_0 \neq 0$, 则 f 在 z_0 处的 Taylor 级数为

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

其收敛半径 $\rho \geq R - |z_0|$.

如果 $\rho > R - |z_0|$, 说明 f 可以全纯开拓到更大的区域中, ζ 称为正则点。

如果对于线段 0ζ 上的每个点 z_0 , 都有 $\rho = R - |z_0|$, 则称 ζ 为奇点。(区别于之前的孤立奇点)

例 6.2.1

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

收敛半径为 $R = 1$, 且 $f(z) = \frac{1}{1-z}$ on $\{|z| < 1\}$. 对于 $z_0 \in B(0, 1)$, 其收敛半径为 $\rho = |1 - z_0| \geq 1 - |z_0|$, 故 $\zeta = 1$ 是唯一的奇点。

定理 6.2.1 幂级数的收敛圆周上必有奇点。

例 6.2.2

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

收敛半径 $R = 1$, 在 $\partial B(0, 1)$ 上处处收敛, 但有奇点。

例 6.2.3

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}$$

收敛半径 $R = 1$, $\partial B(0, 1)$ 上处处是奇点。

假设存在 $\zeta_0 \in \partial B(0, 1)$ 为正则点, 则存在 $z_0 \in 0\zeta$, 且 f 在 z_0 处的 Taylor 级数 $g(z)$ 的收敛半径 $\rho > 1 - |z_0|$. 由于形如

$$\{e^{2\pi i \frac{p}{q}} | p, q \text{ 为整数且互素}\}$$

在 $\partial B(0, 1)$ 上稠密, 故存在 $\zeta_1 = e^{2\pi i \frac{p}{q}} \in \partial B(0, 1)$,

$$g(\zeta_1) = \lim_{r \rightarrow 1^-} g(r\zeta_1) = \lim_{r \rightarrow 1^-} f(r\zeta_1)$$

$$f(r\zeta_1) = \sum_{n=0}^{q-1} r^{n!} \zeta_1^{n!} + \sum_{n=q}^{\infty} r^{n!}$$

对于 $N > q$,

$$\sum_{n=q}^{\infty} r^{n!} > \sum_{n=q}^N r^{n!} > (N - q)r^{N!}$$

当 $r \rightarrow 1^-$, 上式可以大于任何正整数, 矛盾,

6.3 完全解析函数与单值性定理

本节不考。

第七章 共形映射

7.1 正规族

定义 7.1.1 设 $\mathcal{F}$ 是域 D 上的一个函数族。

如果它的任意序列，一定有子列在 D 上的内闭一致收敛，称 $\mathcal{F}$ 为正规族。

如果存在 $M > 0$ 使得对于任意的 $f \in \mathcal{F}$ ，任意的 $z \in D$ ，都有 $|f(z)| \leq M$ ，则称 $\mathcal{F}$ 一致有界。

对于任意的紧集 $K \subset D$ ，存在 $M = M(K) > 0$ ，对于 $\forall f \in \mathcal{F}, \forall k \in K, |f(z)| \leq M$ ，则称 $\mathcal{F}$ 内闭一致有界。

若对于 $\forall \varepsilon > 0$ ，存在 $\delta > 0$ ，当 $z_1, z_2 \in D$ 且 $|z_1 - z_2| < \delta$ 时，对于 $\forall f \in \mathcal{F}$ 都有

$$|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$$

则称 $\mathcal{F}$ 是等度连续的。

定理 7.1.1 (Arzela-Ascoli) 设 $K \subset \mathbb{C}$ 为紧集， $\{f_n\}$ 在 K 上一致有界且等度连续，则 $\{f_n\}$ 必有子列在 K 上一致收敛。

定理 7.1.2 (Montel) 设 $\mathcal{F}$ 是域 D 上的全纯函数族，则 $\mathcal{F}$ 为正规族当且仅当 $\mathcal{F}$ 在 D 上内闭一致有界。

7.2 Riemann 映射定理

定理 7.2.1 设 $G \subsetneq \mathbb{C}$ 为单连通区域，对于 $a \in G$ ，存在唯一的共形映射 $f: G \rightarrow B(0, 1)$ ，满足 $f(a) = 0$ ， $f'(a) > 0$ 。

7.3 边界对应原理

定理 7.3.1 设 G 是由一条简单闭曲线 Γ 所围成的区域，如果 $w = f(z)$ 把 G 共形地映为 $B(0, 1)$ ，则 f 可以扩充到 Γ 上，使得 $f \in C(\overline{G})$ 且把 Γ 一一映为 $|w| = 1$ 。

逆定理也成立：设 G 和 D 分别是由可求长简单闭曲线 γ 和 Γ 为边界区域，如果 $f \in H(G) \cap C(\overline{G})$ 且把 γ 一一映满 Γ ，则 $f: G \rightarrow D$ 是共形映射。

7.4 Schwarz-Christoffel 公式

本节不考。

7.5 复习课：一些重要的共形映射

初等函数：

$$\{z = a + bi : |b| \leq \theta\} \xrightleftharpoons[\log z]{e^z} \{z = re^{i\alpha} : 0 \leq \alpha \leq \theta\} \xrightarrow{z^\beta} \{z = re^{i\alpha} : 0 \leq \alpha \leq \beta\theta\}$$

分式线性变换：把圆周映为圆周，对称点映为对称点。

例 7.5.1 $D = \{z : |z + i| < 2, \operatorname{Im} z > 0\}$, $\Omega = \{z : 0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$, 求从 D 到 Ω 的共形映射。

例 7.5.2 $D = \{z : |z| > 1, |z - \sqrt{3}i| < 2\}$, $\Omega = \{z : |z| < 1\}$, 求从 D 到 Ω 的共形映射 f , 且 $f(\sqrt{3}i) = 0$, $f'(\sqrt{r}i) > 0$.

例 7.5.3 求上半平面到上半平面的分式线性变换 f , 满足 $f(a) = b$, $\arg f'(a) = \theta$.